

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
Информационных технологий и  
математических методов в экономике  
 проф. Давнис В.В.  
23.04.2020

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.Б.07 Линейная алгебра**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

38.03.01 Экономика

**2. Профиль подготовки/специализация:** Бухучет, анализ и аудит, Коммерция, Финансы и кредит, Экономика предприятий и организаций, Экономика труда, Экономика рынков, Корпоративный учет и финансовый анализ, Модели и методы анализа цифровой экономики

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** кафедра Информационных технологий и математических методов в экономике

**6. Составители программы:**

Воищева Ольга Станиславовна, к.э.н., доцент, экономический факультет  
кафедра Информационных технологий и математических методов в экономике

**7. Рекомендована:** НМС экономического факультета ВГУ протокол №4 от 16.04.2020.

**8. Учебный год:** 2020-2021

**Семестр(ы):** 2

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

**Цель** изучения дисциплины – формирование у обучающихся устойчивых знаний, умений и навыков по применению математических моделей и методов линейной алгебры и математического программирования к решению теоретических и практических задач, исследованию прикладных вопросов экономики; развитие логического мышления и математической культуры; формирование необходимого уровня алгебраической подготовки для понимания других математических и прикладных дисциплин.

**Основными задачами** учебной дисциплины являются:

- изучение основных понятий и методов линейной алгебры;
- формирование навыков и умений решать типовые задачи и работать со специальной литературой;
- овладение обучающимися теоретическими и методическими основами моделирования с использованием моделей и методов линейной алгебры и математического программирования;
- ознакомление с вычислительными алгоритмами решения задач линейной алгебры и математического программирования;
- применение методов линейной алгебры и математического программирования для решения конкретных экономических задач;
- овладение современными приемами математического моделирования с использованием универсальных программных средств;
- приобретение обучающимися практических навыков при решении задач моделирования;
- формирование представления об исследовании экономических систем методами математического моделирования.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина «Линейная алгебра» входит в базовую часть учебного плана во 2 семестре и является обязательной. Программа дисциплины строится на предпосылке, что студенты владеют базовыми знаниями по математике на уровне средней школы. Дисциплина создает предпосылки для более глубокого освоения разделов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимальных решений, эконометрики.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):**

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ОПК-2	способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач	<b>Знать:</b> - основы линейной алгебры, необходимые для решения финансовых и экономических задач. <b>Уметь:</b> - осуществлять поиск, сбор и анализ информации, необходимый для решения поставленной экономической задачи.

		<p>- применять методы линейной алгебры к решению различных экономических задач.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>- навыками применения математического инструментария для решения экономических задач;</p> <p>- навыками обработки данных, необходимых для решения экономических задач.</p>
ОПК-3	<p>способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы</p>	<p><b>Знать:</b></p> <p>- основные понятия и методы линейной алгебры, необходимые для решения поставленной задачи;</p> <p>- инструментальные средства линейной алгебры для обработки экономических данных.</p> <p><b>Уметь:</b></p> <p>- осуществлять выбор соответствующего математического инструментария, необходимого для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей;</p> <p>- анализировать результаты расчетов, обосновывать полученные выводы;</p> <p>- формулировать и доказывать основные теоремы линейной алгебры;</p> <p>- решать типовые задачи линейной алгебры.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>- понятийным аппаратом линейной алгебры, необходимым для изучения последующих дисциплин математического цикла и для решения экономических задач;</p> <p>- языком математики для работы со специальной литературой;</p> <p>- навыками применения математического инструментария для анализа полученных данных.</p>
ПК-4	<p>способностью на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты</p>	<p><b>Знать:</b></p> <p>- основы аппарата линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;</p> <p>- основы математических методов моделирования экономических систем.</p> <p><b>Уметь:</b></p> <p>- использовать математический язык и математическую символику при построении стандартных и эконометрических моделей;</p> <p>- прогнозировать на основе стандартных математических моделей развитие экономических процессов и явлений;</p> <p>- анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>- навыками применения математического инструментария для решения экономических задач;</p> <p>- методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.</p>

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.** (в соответствии с учебным планом) — 5/180

**Форма промежуточной аттестации:** экзамен

### 13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			2 семестр
Аудиторные занятия		64	64
в том числе:	лекции	32	32
	практические	32	32
	лабораторные	-	-
Самостоятельная работа		80	80
в том числе: курсовая работа (проект)		-	-
Форма промежуточной аттестации		36	Экзамен -36
Итого:		180	180

#### 13.1. Содержание дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Введение. Основные понятия линейной алгебры	Краткие исторические сведения о создании и развитии линейной алгебры, понятие математической модели, понятие экономико-математической модели.
1.2	Векторы и матрицы	Понятие матрицы, понятие вектора – столбца и вектора- строки. Экономические примеры векторов и матриц. Основные виды матриц, симметрические и ортогональные матрицы. Операции над матрицами и их свойства. Определитель квадратной матрицы и его свойства. Понятие минора, алгебраического дополнения. Теорема Лапласа. Основные методы вычисления определителей n-го порядка. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса. Нахождение обратной матрицы методом присоединенной матрицы. Ранг матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц. Примеры решения экономических задач с использованием матриц.
1.3	Системы линейных уравнений	Основные понятия и определения. Система n линейных уравнений с n переменными. Решение систем в матричной форме. Правило Крамера. Система m уравнений с n переменными. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Жордана – Гаусса решения систем m уравнений с n переменными. Система линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы. Общее, частное и базисное решение систем линейных уравнений. Применение систем линейных уравнений в экономике.
1.4	Линейные и евклидовы пространства	Определение линейного пространства $R^n$ , примеры. Понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. Линейно независимые системы векторов. Базис и координаты. Преобразование координат векторов при замене базиса. Измерность линейного пространства. Определение евклидова пространства. Скалярное произведение и его аксиомы. Примеры евклидовых пространств. Длины векторов и угол между векторами в $R^n$ . Нормированные пространства. Понятие ортонормированного базиса евклидова

		пространства. Разложение вектора по произвольному ортонормированному базису евклидова пространства.
1.5	Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа	Прямые линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой в $R^2$ , $R^3$ , $R^n$ . Уравнение плоскости в $R^3$ и гиперплоскости в $R^n$ . Взаимное расположение прямых и плоскостей. Линии и поверхности второго порядка. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы. Понятие отрезка. Выпуклые множества в пространстве $R^n$ . Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек.
1.6	Линейные преобразования и квадратичные формы	Линейные преобразования пространства $R^n$ . Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.
1.7	Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации	Линейное, нелинейное, выпуклое, невыпуклое, целочисленное, частично – целочисленное, стохастическое и динамическое программирование. Модель транспортной задачи. Модель планирования производства на предприятии. Модель задачи о диете. Модель задачи о назначении. Линейная модель обмена. Классификация методов оптимизации. Общая схема численных методов оптимизации.
1.8	Методы линейного программирования	Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования. Математическая постановка задачи линейного программирования. Общая, стандартная и каноническая задача линейного программирования. Запись задачи линейного программирования в матричном виде. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности.
<b>2. Практические занятия</b>		
2.1	Введение. Основные понятия линейной алгебры	Понятие математической модели, понятие экономико-математической модели и их примеры.
2.2	Векторы и матрицы	Понятие матрицы, основные виды матриц. Операции над матрицами (сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, возведение в степень и транспонирование матриц). Определитель квадратной матрицы и его свойства. Понятие минора, алгебраического дополнения. Теорема Лапласа. Вычисление определителей методом разложения и методом приведения к треугольному виду. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса. Нахождение обратной матрицы методом присоединенной матрицы. Примеры решения экономических задач с использованием алгебры матриц. Ранг матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц.
2.3	Системы линейных уравнений	Основные понятия и определения. Система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными. Решение систем в матричной форме. Правило Крамера. Система $m$ уравнений с $n$ переменными. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Жордана – Гаусса решения систем $m$ уравнений с $n$ переменными. Система линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы. Общее, частное и базисное решение систем линейных уравнений. Применение систем линейных уравнений в экономике.
2.4	Линейные и евклидовы пространства	Определение линейного пространства $R^n$ , примеры. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис и координаты. Преобразование координат векторов при замене базиса. Размерность линейного пространства. Определение

		евклидоваго пространства. Скалярное произведение и его аксиомы. Примеры евклидовых пространств. Длины векторов и угол между векторами в $R^n$ . Нормированные пространства. Понятие ортонормированного базиса евклидоваго пространства. Разложение вектора по произвольному ортонормированному базису евклидоваго пространства.
2.5	Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа	Прямые линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой в $R^2$ , $R^3$ , $R^n$ . Уравнение плоскости в $R^3$ и гиперплоскости в $R^n$ . Взаимное расположение прямых и плоскостей. Линии и поверхности второго порядка. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы. Понятие отрезка. Выпуклые множества в пространстве $R^n$ . Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек.
2.6	Линейные преобразования и квадратичные формы	Линейные преобразования пространств $R^n$ . Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Квадратичные формы, их матрицы в данном базисе. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.
2.7	Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации	Модель транспортной задачи. Модель планирования производства на предприятии. Модель задачи о диете. Модель задачи о назначении. Линейная модель обмена. Классификация методов оптимизации.
2.8	Методы линейного программирования	Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования. Математическая постановка задачи линейного программирования. Общая, стандартная и каноническая задача линейного программирования. Запись задачи линейного программирования в матричном виде. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования.

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)			
		Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение. Основные понятия линейной алгебры	1		2	3
2.	Векторы и матрицы	10	10	26	46
3.	Системы линейных уравнений	10	10	30	50
4.	Линейные и евклидовы пространства	2	2	4	8
5.	Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа	2	2	6	10
6.	Линейные преобразования и квадратичные формы	1	2	4	7
7.	Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации	2	2	4	8
8.	Методы линейного программирования	4	4	4	12
	Экзамен				36
	Итого:	32	32	80	180

#### **14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, контрольные работы, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся.

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Это позволит впоследствии вспомнить изученный материал, дополнить содержание при самостоятельной работе с литературой, подготовиться к экзамену. Необходимо задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. Целесообразно дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой.

Практические занятия реализуются в соответствии с рабочим учебным планом при последовательном изучении тем дисциплины. Практические занятия позволяют развивать у обучающихся творческое теоретическое мышление, умение самостоятельно изучать литературу, анализировать практику; учат четко формулировать мысль, вести дискуссию, то есть имеют исключительно важное значение в развитии самостоятельного мышления.

В ходе подготовки к практическим занятиям обучающимся рекомендуется изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. При этом следует учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Рекомендуется также дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной рабочей программой.

В связи с тем, что активность обучающегося на практических занятиях является предметом контроля его продвижения в освоении курса, то подготовка к таким занятиям требует ответственного отношения.

Прежде чем приступить к решению задач, обучающемуся необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы дисциплины по учебной литературе, рекомендованной программой курса; получить от преподавателя информацию о порядке проведения занятия, критериях оценки результатов работы; получить от преподавателя конкретное задание и информацию о сроках выполнения, о требованиях к оформлению и форме представления результатов.

При выполнении задания необходимо привести развернутые пояснения хода решения и проанализировать полученные результаты. При необходимости обучающиеся имеют возможность задать вопросы преподавателю по трудностям, возникшим при решении задач.

Самостоятельная работа обучающегося является основным средством овладения учебным материалом во время, свободное от обязательных учебных занятий. Самостоятельная работа обучающегося над усвоением учебного материала по учебной дисциплине может выполняться в библиотеке университета, учебных кабинетах, компьютерных классах, а также в домашних условиях. Содержание самостоятельной работы обучающегося определяется учебной программой дисциплины, методическими материалами, заданиями и указаниями преподавателя.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное изучение отдельных тем и вопросов учебной дисциплины. Самостоятельная работа является обязательной для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует

более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

Для обеспечения самостоятельной работы на кафедре Информационных технологий и математических методов в экономике разработаны методические указания к самостоятельной работе студентов.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 422 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/450038">https://urait.ru/bcode/450038</a>
2.	Красс, М. С. Математика в экономике. Базовый курс : учебник для бакалавров / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 470 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-3137-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/426158">https://urait.ru/bcode/426158</a>
3.	Высшая математика для экономистов : учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н.Ш. Кремер. — 3-е изд. — Москва : Юнити, 2015. — 482 с. : граф. — (Золотой фонд российских учебников). — Режим доступа: по подписке. — URL: <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=114541">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=114541</a> — ISBN 978-5-238-00991-9
4.	Высшая математика для экономического бакалавриата в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 276 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05820-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/436490">https://urait.ru/bcode/436490</a>
5.	Малугин, В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для бакалавриата и специалитета / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 478 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-02976-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/413355">https://urait.ru/bcode/413355</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
6.	Кундышева, Е.С. Математика : учебник / Е.С. Кундышева. — 4-е изд. — Москва : Дашков и К°, 2015. — 562 с. : табл., граф., схем., ил. — Режим доступа: по подписке. — URL: <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=452840">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=452840</a> . — Библиогр.: с. 552-553. — ISBN 978-5-394-02261-6.
7.	Татарников, О. В. Линейная алгебра : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнева ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 334 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-3568-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/406922">https://urait.ru/bcode/406922</a>
8.	Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 2005. — 352 с.
9.	Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник — М.: Изд. «Дело», 2001. — 688с.
10.	Иванова, С. А. Линейная алгебра : учебное пособие : [16+] / С. А. Иванова, В. А. Павский ; Кемеровский государственный университет. — 2-е изд., перераб. и доп. — Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. — 125 с. : ил., табл. — Режим доступа: по подписке. — URL: <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=573547">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=573547</a> — ISBN 978-5-8353-2359-3

11.	Шипачев, В. С. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 447 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <a href="https://urait.ru/bcode/449732">https://urait.ru/bcode/449732</a>
12.	Красс М.С. Математика для экономистов/М.С. Красс, Б.П.Чупрынов. - Санкт-Петербург[и др.]: Питер, 2010. – 464 с. : ил., табл. – (Учебное пособие). – Библиогр.: с.461.-Предм.указ.: с.462-464.- М.: ИНФРА-М, 2008. – 463 с. ISBN 978-5-94723-672

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1.	Зональная научная библиотека ВГУ <a href="https://www.lib.vsu.ru/">https://www.lib.vsu.ru/</a>
2.	ЭБС Лань, <a href="http://e.lanbook.com/">http://e.lanbook.com/</a>
3.	ЭБС Университетская библиотека online <a href="https://biblioclub.ru/">https://biblioclub.ru/</a>
4.	ЭБС ЮРАЙТ <a href="https://urait.ru/">https://urait.ru/</a>
5.	Образовательный портал «Электронный университет ВГУ»/LMC Moodle» <a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Методические указания для самостоятельной работы студентов по курсу "Линейная алгебра" [Электронный ресурс] : для студ. 1 курса экон. фак. по направлениям "Экономика" и "Экон. безопасность" / Воронеж. гос. ун-т ; [сост. : В.В. Давнис и др.] .— Электрон. текстовые дан. (1 файл : Кб) .— Воронеж, 2015 .— Загл. с титул. экрана .— Режим доступа: для зарегистрированных читателей ВГУ .— Текстовый файл .— Widows 2000 ; Adobe Acrobat Reader .— URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-279.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-279.pdf</a>

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости):

Программа дисциплины реализуется с применением дистанционных образовательных технологий.

Для организации занятий требуется:

- персональный компьютер и видеопроекторное оборудование;
- программное обеспечение общего назначения Microsoft Office;
- специализированное программное обеспечение при изучении дисциплины не используется.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

г. Воронеж, ул. Хользунова, 42в, учебный корпус №5а  
 Специализированная мебель, проектор NEC PA500U, экран для проектора настенный Projecta Compact Electrol 113, компьютер XS35GS V3L, цифровая аудио платформа Symetrix Jupiter 4, телевизоры Samsung 50" (2 шт.), комплект активных громкоговорителей Apart SDQ5P, микрофон проводной; проектор Acer X1240, Экран Projecta Compact Electrol, WHDMI-приемник, переносной ноутбук HP.

## 19. Фонд оценочных средств:

### 19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения:

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ОПК-2 способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач	<b>Знать:</b> - основы линейной алгебры, необходимые для решения финансовых и экономических задач.	Лекции 1.1 Основные понятия линейной алгебры 1.2 Векторы и матрицы 1.3 Системы линейных уравнений 1.4 Линейные и евклидовы пространства 1.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 1.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 1.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 1.8 Методы линейного программирования	Контрольные вопросы или тестовые задания
	<b>Уметь:</b> -осуществлять поиск, сбор и анализ информации, необходимый для решения поставленной экономической задачи; -применять методы линейной алгебры к решению различных экономических задач.	Практические занятия 2.1 Основные понятия линейной алгебры 2.2 Векторы и матрицы 2.3 Системы линейных уравнений 2.4 Линейные и евклидовы пространства 2.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 2.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 2.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 2.8 Методы линейного программирования	Практические задания и контрольные работы №1 и №2
	<b>Владеть:</b> - навыками применения математического инструментария для решения экономических задач; - навыками обработки данных, необходимых для решения экономических задач.	Практические занятия 2.1 Основные понятия линейной алгебры 2.2 Векторы и матрицы 2.3 Системы линейных уравнений 2.4 Линейные и евклидовы пространства	Практические задания и контрольные работы №1 и №2

		2.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 2.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 2.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 2.8 Методы линейного программирования	
ОПК-3 способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы	<b>Знать:</b> - основные понятия и методы линейной алгебры, необходимые для решения поставленной задачи; - инструментальные средства линейной алгебры для обработки экономических данных.	Лекции 1.1 Основные понятия линейной алгебры 1.2 Векторы и матрицы 1.3 Системы линейных уравнений 1.4 Линейные и евклидовы пространства 1.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 1.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 1.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 1.8 Методы линейного программирования	Контрольные вопросы или тестовые задания
	<b>Уметь:</b> - осуществлять выбор соответствующего математического инструментария, необходимого для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; - анализировать результаты расчетов, обосновывать полученные выводы; - формулировать и доказывать основные теоремы линейной алгебры; - решать типовые задачи линейной алгебры.	Практические занятия 2.1 Основные понятия линейной алгебры 2.2 Векторы и матрицы 2.3 Системы линейных уравнений 2.4 Линейные и евклидовы пространства 2.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 2.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 2.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 2.8 Методы линейного программирования	Практические задания и контрольные работы №1 и №2
	<b>Владеть:</b> - понятийным аппаратом линейной алгебры, необходимым для изучения последующих дисциплин математического цикла и для решения экономических задач; - языком математики для работы со специальной литературой;	Практические занятия 2.1 Основные понятия линейной алгебры 2.2 Векторы и матрицы 2.3 Системы линейных уравнений 2.4 Линейные и евклидовы пространства	Практические задания и контрольные работы №1 и №2

	- навыками применения математического инструментария для анализа полученных данных.	2.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 2.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 2.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 2.8 Методы линейного программирования	
ПК-4 способностью на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты	<b>Знать:</b> - основы аппарата линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач; - основы математических методов моделирования экономических систем.	Лекции 1.1 Основные понятия линейной алгебры 1.2 Векторы и матрицы 1.3 Системы линейных уравнений 1.4 Линейные и евклидовы пространства 1.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 1.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 1.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 1.8 Методы линейного программирования	Контрольные вопросы или тестовые задания
	<b>Уметь:</b> - использовать математический язык и математическую символику при построении стандартных и эконометрических моделей; - прогнозировать на основе стандартных математических моделей развитие экономических процессов и явлений; - анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.	Практические занятия 2.1 Основные понятия линейной алгебры 2.2 Векторы и матрицы 2.3 Системы линейных уравнений 2.4 Линейные и евклидовы пространства 2.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 2.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 2.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 2.8 Методы линейного программирования	Практические задания и контрольные работы №1 и №2
	<b>Владеть:</b> - навыками применения математического инструментария для решения экономических задач; - методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов	Практические занятия 2.1 Основные понятия линейной алгебры 2.2 Векторы и матрицы 2.3 Системы линейных уравнений 2.4 Линейные и евклидовы пространства	Практические задания и контрольные работы №1 и №2

		2.5 Элементы аналитической геометрии и элементы выпуклого анализа 2.6 Линейные преобразования и квадратичные формы 2.7 Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации 2.8 Методы линейного программирования	
--	--	---	--

## 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основных понятий и методов линейной алгебры, владение понятийным аппаратом линейной алгебры;
- 2) умение формулировать и доказывать основные теоремы линейной алгебры; умение иллюстрировать ответ примерами и фактами;
- 3) умение решать типовые задачи линейной алгебры;
- 4) умение применять теоретические знания и методы линейной алгебры к решению практических задач;
- 5) умение использовать математический аппарат при решении теоретических и прикладных задач;
- 6) умение анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты;
- 7) владение навыками применения математического инструментария для решения экономических задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<p><i>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом линейной алгебры, умеет формулировать и доказывать основные теоремы линейной алгебры; способен иллюстрировать ответ примерами и фактами; умеет решать типовые задачи линейной алгебры; умеет применять теоретические знания для решения практических задач; умеет использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; умеет применять методы линейной алгебры к решению практических задач.</i></p> <p><i>Или</i></p> <p><i>Посещено более 95 процентов лекционных и практических занятий, выполнено более 95 процентов заданий по лекционным и практическим занятиям, продемонстрирована систематическая активная работа на практических занятиях, контрольные работы выполнены на оценку «отлично».</i></p>	<p><i>Повышенный уровень</i></p>	<p><i>Отлично</i></p>
<p><i>Обучающийся владеет понятийным аппаратом линейной алгебры, умеет формулировать основные теоремы линейной алгебры, но при доказательстве допускает незначительные ошибки, способен иллюстрировать ответ примерами и фактами; но при решении типовых задач линейной алгебры допускает незначительные вычислительные ошибки; способен применять теоретические знания для решения практических задач,</i></p>	<p><i>Базовый уровень</i></p>	<p><i>Хорошо</i></p>

<p>умеет использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; умеет применять методы линейной алгебры к решению практических задач.</p> <p>Или</p> <p>Посещено от 80 до 95 процентов лекционных и практических занятий, выполнено от 80 до 95 процентов заданий по лекционным и практическим занятиям, продемонстрирована систематическая активная работа на практических занятиях, контрольные работы выполнены на оценку «хорошо» и выше.</p>		
<p>Обучающийся частично владеет теоретическими основами линейной алгебры, формулирует основные теоремы линейной алгебры, но не умеет их доказывать; обучающийся дает неполные ответы; фрагментарно способен применять теоретические знания для решения практических задач; допускает ошибки при решении типовых задач линейной алгебры; умеет фрагментарно использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; умеет фрагментарно применять методы линейной алгебры к решению практических задач.</p> <p>Или</p> <p>Посещено от 65 до 80 процентов лекционных и практических занятий, выполнено от 65 до 80 процентов заданий по лекционным и практическим занятиям, контрольные работы выполнены на оценку «удовлетворительно» и выше.</p>	<p>Пороговый уровень</p>	<p>Удовлетворительно</p>
<p>Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания теоретических основ линейной алгебры, допускает грубые ошибки при решении типовых задач линейной алгебры, допускает грубые ошибки при применении теоретических знаний для решения практических задач, не умеет использовать математический аппарат при решении теоретических и практических задач; не умеет применять методы линейной алгебры к решению практических задач.</p>	<p>-</p>	<p>Неудовлетворительно</p>

### 19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

#### 19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Понятие  $n$ -мерного вектора, основные определения.
2. Операции над векторами, основные свойства операций.
3. Линейная зависимость системы векторов.
4. Лемма о линейной зависимости системы векторов, содержащей нулевой вектор.
5. Лемма о линейной зависимости диагональной системы векторов.
6. Базис и ранг системы векторов.
7. Матрицы. Основные понятия и определения.
8. Операции над матрицами. Свойства операций.
9. Определитель матрицы, свойства определителя.
10. Вычисления определителей 2-го, 3-го и высшего порядков.
11. Понятие обратной матрицы. Теорема о существовании и нахождении обратной матрицы.
12. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью преобразований Гаусса.

13. СЛАУ. Матрично-векторная запись СЛАУ. Понятие решения СЛАУ. Классификация СЛАУ по наличию решений.
14. Критерий совместности СЛАУ (теорема Кронекера-Капелли).
15. Методы решения СЛАУ квадратного вида (nхn). Метод Крамера
16. Методы решения СЛАУ квадратного вида (nхn). Метод обратной матрицы
17. Методы решения СЛАУ квадратного вида (nхn). Метод Гаусса
18. Решение СЛАУ прямоугольного вида (mхn). Общее решение, частное решение, базисное решение, опорное решение.
19. Однородная система уравнений. Теорема о существовании нетривиального решения (случай, когда система nхn).
20. Необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения системы nхm.
21. Фундаментальная система решений однородной системы уравнений.
22. Общее решение системы уравнений в векторной форме.
23. Собственные значения и собственные векторы матрицы.
24. Свойства собственных векторов матрицы.
25. Ортогональная и ортонормированная системы векторов.
26. Ортогонализация системы векторов.
27. Собственные векторы симметрической матрицы. Алгоритм построения ортонормированного базиса.
28. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду.
29. Ортогональные матрицы. Построение ортогональной матрицы.
30. Понятие квадратичной формы. Стандартный и канонический виды квадратичной формы.
31. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
32. Общая постановка задачи математического программирования.
33. Классификация задач математического программирования.
34. Этапы решения задач математического программирования.
35. Общая постановка задач линейного программирования.
36. Стандартная и каноническая формы записи ЗЛП. Правила, позволяющие осуществить эквивалентные перезаписи задачи.
37. Графическая интерпретация ЗЛП.
38. Экономическая интерпретация задачи, двойственной задаче об использовании ресурсов.
39. Свойства взаимно-двойственных задач.
40. 1 и 2 теоремы двойственности. Экономический смысл теорем.

### 19.3.2 Перечень практических заданий:

1. Вычислить выражение  $X = ((A - B) * C)^T * D^T$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = (3 \quad 5 \quad 1)$$

2. Вычислите выражение  $X = (AB - 3C^T)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = (7 \quad 2 \quad 4) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Вычислите выражение  $X = (ABC + 2D)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (2 \quad 5 \quad 1) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Вычислите выражение  $X = (AB)^T + (CD)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad D = (2 \quad -1 \quad 3)$$

5. Вычислите выражение  $X = AB - BC + 5C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Вычислите определители третьего порядка:

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = ?$

2.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = ?$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = ?$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = ?$

7. Найдите обратные матрицы для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

8. Решите матричное уравнение: а)  $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

9. Найдите общее, базисное и частное решения системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases} .$$

10. Исследуйте однородную систему на наличие у нее нетривиального решения:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

11. Решите методом обратной матрицы систему уравнений, предварительно вычислив обратную матрицу методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - x_3 = -8 \\ 6x_1 + 8x_2 + 6x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases} ; \quad \text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases} .$$

12. Решите системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}; \\ \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}; \\ \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}; \\ \text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \end{array}$$

13. Вычислите выражение:  $X = B \cdot C^T \cdot D - A^2$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = (-3 \ 2 \ 4), C = (3 \ 2 \ -5), D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Вычислите выражение:  $X = ((B - A) \cdot C)^T \cdot D^T$  для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = (3 \ 5 \ 1).$$

15. Вычислите определитель методом разложения:  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 13 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 10 \end{vmatrix}$ .

16. Вычислите определитель методом приведения к треугольному виду:  $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ .

17. Решите матричное уравнение, вычислив обратную матрицу методом Гаусса:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Решите матричное уравнение, вычислив обратную матрицу методом алгебраических дополнений:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Найдите общее, базисное и частное решения для системы уравнений:

$$\text{А) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}
 \quad
 \text{Б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

20. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\text{А) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \quad
 \text{Б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1(0,2,7)$ ,  $A_2(4,2,5)$ ,  $A_3(0,7,1)$ ,  $A_4(1,5,0)$ . Найдите:

1. длину ребра  $A_1A_2$ ;
  2. угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;
  3. уравнение ребра  $A_1A_4$ , уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$  и угол между ребром  $A_1A_4$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$ ;
  4. уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;
  5. площадь грани  $A_1A_2A_3$  и объем пирамиды.
- Сделайте чертеж.

22. Решите систему линейных уравнений двумя способами:

- 1) методом Крамера; 2) матричным методом:

$$\begin{cases} 5x + 8y + 3z = -18 \\ 3x - 2y + 6z = 7 \\ 2x + y - z = -5 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases} x - 4y - 2z = -7 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -7 \end{cases}$$

23. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_3 - 5x_4 = 9 \end{cases}$$

### 19.3.3 Тестовые задания:

1. Система ненулевых векторов называется линейно зависимой, если:

- (а) существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , что любая комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору;
- (б) существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , не равные одновременно нулю, что линейная комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору:  
 $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}$ ;
- (с) существуют такие числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , не равные одновременно нулю, что комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору:  
 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \cdot (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k) = \bar{0}$ .

2. Какая квадратная матрица называется единичной?

- а. у которой все элементы равны единице;
- б. у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все другие – нулю;
- с. у которой все элементы главной и побочной диагонали равны единице, а все другие – нулю.

3. Какой размерностью должны обладать матрицы  $A$  и  $B$ , чтобы можно было осуществить перемножение  $A \cdot B$ ?
4. Понятие обратной матрицы распространяется:  
 1) на любые матрицы; 2) только на квадратные матрицы; 3) только на диагональные матрицы.
5. Укажите то преобразование, которое нельзя считать элементарным преобразованием матрицы:  
 а. удаление любых столбцов (строк) матрицы;  
 б. перестановка двух столбцов (строк) матрицы;  
 с. умножение всех элементов одного столбца (строки) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.
6. По какой формуле вычисляется определитель второго порядка?  
 1)  $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;      2)  $\Delta_2 = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$ ;  
 3)  $\Delta_2 = a_{11}a_{12} - a_{22}a_{21}$ .
7. Меняется ли при транспонировании матрицы ее определитель?  
 1) да;      2) нет;      3) зависит от размера матрицы.
8. Система уравнений называется совместной, если она:  
 1) имеет хотя бы одно решение;      2) не имеет решений;  
 3) содержит, по крайней мере, два одинаковых уравнения.
9. Как называются системы уравнений, если они имеют одно и то же множество решений?  
 1) совместные;      2) эквивалентные;      3) элементарные.
10. Какое название носят формулы  $x_i = \Delta_j / \Delta$ ,  $\Delta \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ?  
 1) формулы Гаусса;      2) формулы Гессе;      3) формулы Крамера.
11. Если  $A$  и  $B$  – данные матрицы, имеющие одинаковое количество строк, причем  $A$  – квадратная матрица, то решением матричного уравнения  $AX = B$  является:  
 1)  $X = B/A$ ;      2)  $X = A^{-1}B$ ;      3)  $X = B^{-1}A$ .
12. Частным решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 19 \\ -3x_1 - 8x_2 - 2x_3 = -40 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases} \text{ является}$$

- 1) (-6, 4, 2)      2) (4, 8, 3)      3) (0, 0, 0)      4) (5, -7, 2).

Ответ обосновать.

13. Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -9 & 10 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  алгебраическим дополнением к элементу  $a_{32}$  является

1)  $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -9 & 7 \end{vmatrix}$       2)  $A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}$       3)  $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -9 & 7 \end{vmatrix}$       4)  $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 10 \end{vmatrix}$

Ответ обосновать.

14. Матрица  $A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  вырождена при  $\lambda$  равном

- 1) 8/3      2) 3      3) 2      4) -8/3

Ответ обосновать.

15. Обратной к матрице  $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 49 & 5 \end{pmatrix}$  является матрица

1)  $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 49 & 5 \end{pmatrix}$       2)  $\begin{pmatrix} 1/10 & 1 \\ 1/49 & 1/5 \end{pmatrix}$       3)  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -49 & 10 \end{pmatrix}$       4)  $\begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -49 & -5 \end{pmatrix}$

Ответ обосновать.

16. Если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , то матрица  $C = 2A + B$  имеет вид:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ответ обосновать.

17. Если  $(x_0, y_0)$  решение системы линейных уравнений  $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-5y=1 \end{cases}$ , то  $x_0$  может определяться по формуле

$$1) x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} \quad 2) x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} \quad 3) x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} \quad 4) x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$$

Ответ обосновать.

18. Ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  равен

1) 0                      2) 1                      3) 2                      4) 3    Ответ обосновать.

19. Определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-1 \end{vmatrix} = 0$  при  $\alpha$  равном:

1) 1                      2) 0,5                      3) 2                      4) 0                      Ответ обосновать.

20. С увеличением скалярных произведений пары векторов располагаются в порядке:  
Варианты ответов:

1.  $\vec{a} = (3, -1, 4)$

$\vec{b} = (-1, 3, 2)$

2.  $\vec{a} = (5, 1, 2)$

$\vec{b} = (-1, 5, 2)$

3.  $\vec{a} = (-3, 1, 4)$

$\vec{b} = (2, 2, 2)$

4.  $\vec{a} = (-3, 1, 4)$

$\vec{b} = (2, 2, 2)$

5.  $\vec{a} = (1, 2, 3)$

$\vec{b} = (3, 2, 1)$

#### Критерии оценки

Критерием оценивания тестов является оценка. Общая сумма баллов, которая может быть получена за аттестационный тест, соответствует количеству тестовых заданий. За каждое правильно решенное тестовое задание присваивается по 1 баллу.

#### Шкала оценивания тестовых заданий:

-оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы на 86-100% тестовых заданий;

-оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы на 70-85% тестовых заданий;

-оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы на 54-69% тестовых заданий;

-оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если даны правильные ответы менее чем на 54% тестовых заданий.

#### 19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ:

**Пример практического задания**  
(текущая аттестация)

**Контрольная работа 1**

1. Вычислите  $X = (ABC + 2D + 3E)^T$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (8 \quad -3 \quad 1) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите определитель 3-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите определитель 4-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & -1 & -5 & -1 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите обратную матрицу методом Гаусса для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите матрицу  $X$  из матричного уравнения

$$X \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Контрольная работа 2**

1. Найдите единственное решение системы методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1. \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Найдите единственное решение системы методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Найдите единственное решение системы: методом с использованием расширенной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9. \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

4. Найдите общее, базисное и частное решения систем линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4. \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

5. Найдите общее, базисное и частное решения систем линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

### Критерии оценки

Каждому обучающемуся выдается вариант контрольной работы, состоящей из пяти задач. Критерием оценивания ответов на контрольную работу является оценка.

*Шкала оценивания контрольной работы:*

-оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если верно решены все предложенные задачи, возможно допущена одна вычислительная ошибка;

-оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если верно решены четыре из пяти предложенных задач, или решены все задачи, но допущены ошибки в ходе решения;

-оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если верно решены три из пяти предложенных задач, а решение остальных задач не приведено или они решены с грубыми ошибками;

-оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если решено меньше трех задач или в целом все задачи решены неверно.

## 19.3.5 Примеры КИМ

### Контрольно-измерительный материал №1

1. Обратная матрица и ее свойства. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Задачи:

1. Найдите произведение матриц:  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

2. Вычислите определитель матрицы A четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Найдите обратную матрицу к матрице A методом алгебраических дополнений:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$$

5. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 18x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ 8x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

## Контрольно-измерительный материал №2

1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: случай единственного решения.
2. Действия над матрицами: умножение матрицы на матрицу; транспонирование матрицы. Их свойства.

Задачи:

1. Вычислите произведение матриц:  $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 9 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ .

2. Вычислите определитель матрицы A четвертого порядка методом разложения:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите обратную матрицу для матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

5. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

### 19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме: контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Промежуточная аттестация с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) проводится в рамках электронного курса, размещенного в ЭИОС (образовательный портал «Электронный университет ВГУ» (LMS Moodle, <https://edu.vsu.ru/>)).

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме экзамена.

Обучающиеся, проходящие промежуточную аттестацию с применением ДОТ, должны располагать техническими средствами и программным обеспечением, позволяющим обеспечить

процедуры аттестации. Обучающийся самостоятельно обеспечивает выполнение необходимых технических требований для проведения промежуточной аттестации с применением дистанционных образовательных технологий.

Идентификация личности обучающегося при прохождении промежуточной аттестации обеспечивается посредством использования каждым обучающимся индивидуального логина и пароля при входе в личный кабинет, размещенный в ЭИОС ВГУ.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные или качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.